

Test - 2026-05-26

Table des matières

Note	1
Énoncé et solution	1
Évaluation	5
Solution reconstruite de l'étudiant	7

Note

— Note : 9.7/10

Énoncé et solution

Exercice 1

Énoncé

On considère l'équation différentielle $y'(t) = \sin(t) - y(t)$, soit $f(t, y) = \sin(t) - y$. On rappelle les conditions de consistance à l'ordre 1 et 2 établies en cours :

$$\text{Ordre 1 : } F(t, y) = \Phi(t, y, 0), \quad (2)$$

$$\text{Ordre 2 : } \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) F(t, y) = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0). \quad (3)$$

On considère le schéma suivant, dit de *Heun* :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + h f(t_n, y_n))].$$

a. Mettre ce schéma sous la forme générale $y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n, h)$ en explicitant $\Phi(t, y, h)$.

- b. Vérifier à l'aide de la condition (2) que le schéma est consistant à l'ordre 1.
- c. Vérifier à l'aide de la condition (3) que le schéma est consistant à l'ordre 2. On calculera au préalable les dérivées partielles de F et de Φ nécessaires.
- d. Le schéma de Heun étant stable (admis), en déduire son ordre de convergence.
- e. Donner les définitions de méthode absolument stable, région de stabilité et méthode A-stable.

Solution

Question a — Mise sous forme générale Le schéma de Heun s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + h f(t_n, y_n))].$$

En factorisant par h , on identifie :

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n, h)$$

avec

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t + h, y + h f(t, y))].$$

Question b — Consistance à l'ordre 1 La condition de consistance à l'ordre 1 est (condition (2)) :

$$\Phi(t, y, 0) = F(t, y).$$

Ici $F(t, y) = f(t, y) = \sin(t) - y$. Calculons $\Phi(t, y, 0)$:

$$\begin{aligned} \Phi(t, y, 0) &= \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t + 0, y + 0 \cdot f(t, y))] \\ &= \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t, y)] \\ &= f(t, y) \\ &= F(t, y). \end{aligned}$$

La condition (2) est vérifiée : le schéma de Heun est consistant à l'ordre 1.

Question c — Consistance à l'ordre 2

Calcul des dérivées partielles de F . On a $F(t, y) = \sin(t) - y$, d'où :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = \cos(t), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = -1.$$

Le membre de gauche de la condition (3) vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) F(t, y) &= \cos(t) + (-1)(\sin(t) - y) \\ &= \cos(t) - \sin(t) + y. \end{aligned}$$

Calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0)$. On a :

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t + h, y + h f(t, y))].$$

Posons $g(h) = f(t + h, y + h f(t, y))$. On dérive g par rapport à h en utilisant la règle de la chaîne :

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial t}(t + h, y + h f(t, y)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t + h, y + h f(t, y)) \cdot f(t, y).$$

On évalue en $h = 0$:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) f(t, y).$$

Puisque $f(t, y) = \sin(t) - y$, on a $\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) = \cos(t)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -1$, d'où :

$$g'(0) = \cos(t) + (-1)(\sin(t) - y) = \cos(t) - \sin(t) + y.$$

Comme $\Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} [f(t, y) + g(h)]$, on obtient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{1}{2} g'(0) = \frac{1}{2} (\cos(t) - \sin(t) + y).$$

Vérification de la condition (3). Le membre de droite de (3) vaut :

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = 2 \times \frac{1}{2} (\cos(t) - \sin(t) + y) = \cos(t) - \sin(t) + y.$$

Le membre de gauche vaut :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) F(t, y) = \cos(t) - \sin(t) + y.$$

Les deux membres sont égaux.

La condition (3) est vérifiée : le schéma de Heun est consistant à l'ordre 2.

Question d — Ordre de convergence D'après le théorème du cours : si un schéma à un pas est consistant et stable, alors il est convergent.

Le schéma de Heun est :

- consistant à l'ordre 2 (démontré à la question c),
- stable (admis par l'énoncé).

Par conséquent, le schéma de Heun est convergent. De plus, puisque la consistance est d'ordre 2, l'estimation d'erreur de convergence donne :

$$\max_{n \in \{0, \dots, N\}} |y(t_n) - y_n| \leq S \sum_{n=1}^N |\varepsilon_n| \leq S \cdot C h^2$$

où S est la constante de stabilité et C une constante indépendante de h .

Le schéma de Heun est convergent d'ordre 2.

Question e — Définitions Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ et considérons le problème type $y' = \lambda y$.

Méthode absolument stable. Une méthode numérique est dite *absolument stable* pour un choix de λ et de pas h si la suite (y_n) produite par le schéma appliqué au problème type $y' = \lambda y$ avec $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

Région de stabilité absolue. La *région de stabilité absolue* d'une méthode numérique est l'ensemble des valeurs $z = \lambda h \in \mathbb{C}$ telles que la suite (y_n) produite par le schéma appliqué au problème type vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Méthode A-stable. Une méthode numérique est dite *A-stable* si sa région de stabilité absolue contient le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Autrement dit, pour tout λ à partie réelle strictement négative et pour tout pas $h > 0$, la suite (y_n) converge vers 0.

Ces trois définitions caractérisent le comportement d'un schéma numérique vis-à-vis de la stabilité sur des intervalles de temps potentiellement infinis, ce qui est fondamental pour les équations raides.

Barème

Exercice 1

- **Question a** (2 points)
- **Question b** (2 points)
- **Question c** (6 points)
 - Étape 1 (2 points) — Dérivées partielles de F et membre de gauche de (3)
 - Étape 2 (3 points) — Calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0)$ par la règle de la chaîne
 - Étape 3 (1 point) — Vérification de l'égalité des deux membres
- **Question d** (2 points)
- **Question e** (3 points)
 - Étape 1 (1 point) — Définition de méthode absolument stable
 - Étape 2 (1 point) — Définition de région de stabilité absolue
 - Étape 3 (1 point) — Définition de méthode A-stable

Évaluation

Exercice 1 (15/15)

- **Question a (2/2 points)** L'étudiant substitue correctement $f(t, y) = \sin(t) - y$ dans le schéma de Heun et identifie $\Phi(t, y, h) = \frac{h-2}{2}y + \frac{1-h}{2}\sin(t) + \frac{\sin(t+h)}{2}$. L'expansion algébrique est exacte et la mise sous forme $y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n, h)$ est correcte.

- **Question b (2/2 points)** Le calcul de $\Phi(t, y, 0) = -y + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} \sin(t) = \sin(t) - y = F(t, y)$ est correct. La condition (2) est bien vérifiée.
- **Question c (6/6 points)**
 - **Étape 1 (2/2 points)** Dérivées partielles de F : $\frac{\partial F}{\partial t} = \cos(t)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -1$.
Membre de gauche de (3) : $\cos(t) - \sin(t) + y$. Correct.
 - **Étape 2 (3/3 points)** Calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0)$ par dérivation directe de la forme développée : $\frac{y}{2} - \frac{\sin(t)}{2} + \frac{\cos(t)}{2}$. Correct.
 - **Étape 3 (1/1 point)** Vérification que $2\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = y - \sin(t) + \cos(t)$ coïncide avec le membre de gauche. Correct.
- **Question d (2/2 points)** Conclusion correcte : stabilité (admise) + consistance d'ordre 2 $\Rightarrow$ convergence d'ordre 2.
- **Question e (3/3 points)**
 - **Étape 1 (1/1 point)** Définition de méthode absolument stable : correcte (convergence de y_n vers 0 pour $y' = \lambda y$, $\text{Re}(\lambda) < 0$, pour un h fixé).
 - **Étape 2 (1/1 point)** Définition de région de stabilité absolue : ensemble des $z = \lambda h \in \mathbb{C}$ tels que $y_n \rightarrow 0$. Correct.
 - **Étape 3 (1/1 point)** Définition de A-stabilité : la région de stabilité contient le demi-plan $\text{Re}(z) < 0$. Correct.

Rédaction (2.5/3)

Total : 17.5/18

Note : 9.7/10

Points forts :

- Toutes les questions sont traitées et les résultats sont corrects.
- Les calculs sont menés sans erreur, y compris la dérivation de Φ par rapport à h (question c), qui est le point technique principal de l'exercice.
- Les trois définitions de la question e sont précises et complètes.
- Les conclusions sont clairement énoncées après chaque vérification.

Points à améliorer :

- **Question a :** la réponse attendue exprime Φ sous forme générale en fonction de f , soit $\Phi(t, y, h) = \frac{1}{2}[f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y))]$, avant de spécialiser. L'approche choisie (substitution immédiate de $f = \sin(t) - y$) est mathématiquement correcte mais moins élégante et moins réutilisable.
- **Question d :** la réponse est très laconique (une seule phrase). Il serait préférable de rappeler le théorème invoqué (un schéma à un pas stable et consistant d'ordre p est convergent d'ordre p) et d'écrire l'estimation d'erreur $\max_n |y(t_n) - y_n| = O(h^2)$.

- De manière générale, quelques phrases de transition supplémentaires amélioreraient la lisibilité.

Zones barrées par l'étudiant :

- Début de la question c : zone barrée — traitée comme non-réponse, sans pénalité.
- Question e, définition 1 : zone barrée entre « absolument » et « stable » — texte environnant complet, sans impact.
- Question e, définition 3 : zone barrée après « lorsque » — texte environnant complet, sans impact.

Aucune zone \notreadableatocr ni \notreadableatcoherency n'est présente dans cette copie. L'OCR-Shield ne s'applique pas.

Solution reconstruite de l'étudiant

On considère le schéma :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))]$$

a) on prend $f(t, y) = \sin(t) - y = F(t, y)$
donc

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [\sin(t_n) - y_n + \sin(t_n + h) - y_n - h(\sin(t_n) - y_n)]$$

$$= y_n + \frac{h}{2} [(h - 2)y_n + (1 - h)\sin(t_n) + \sin(t_n + h)]$$

$$= y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) \text{ avec } \Phi(t_n, y_n, h) = \frac{h - 2}{2}y_n + \frac{1 - h}{2}\sin(t_n) + \frac{\sin(t_n + h)}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} \Phi(t_n, y_n, 0) &= -y_n + \frac{1}{2}\sin(t_n) + \frac{1}{2}\sin(t_n) \\ &= \sin(t_n) - y_n = F(t_n, y_n) \end{aligned}$$

donc le schéma est consistant à l'ordre 1.

c)

raturé
8%

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = \cos(t) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = -1$$

donc

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y)F(t, y) = \cos(t) - 1(\sin(t) - y) = \cos(t) - \sin(t) + y$$

de même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, h) &= \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{h}{2}y - \frac{2}{2}y + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{h}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(t+h) \right) \\ &= \frac{y}{2} - \frac{\sin(t)}{2} + \frac{1}{2}\cos(t+h)\end{aligned}$$

donc

$$2\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = y - \sin(t) + \cos(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y)F(t, y)$$

donc le schéma est consistant à l'ordre 2.

d) Le schéma de Heun est stable et consistant à l'ordre 2. Donc le schéma est convergent à l'ordre 2.

e)- En prenant $y'(t) = \lambda y(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Re(\lambda) < 0$, si pour un h fixé on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n) = 0$$

alors la méthode est absolument

raturé

8%

stable pour ce h donnée.

• On appelle région de stabilité l'ensemble des valeurs $z = \lambda h \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n) = 0$$

• Une méthode est A -stable lorsque

raturé

4%

sa région de stabilité inclut

le demi plan où $Re(z) < 0$.